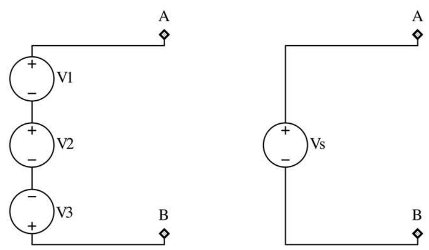
Nestor Brito
Ingeniería Eléctrica
nestorlbriton@hotmail.com

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Electrónica y Circuitos
Circuitos Eléctricos I (EC1021)

PREPARADURÍA #2

Fuentes de voltaje en serie

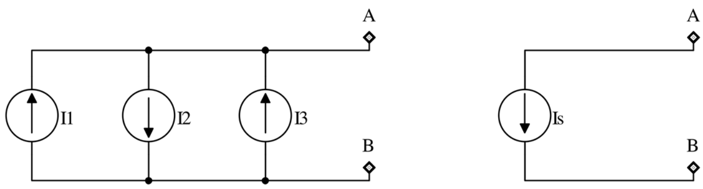


Tenemos fuentes independientes de voltaje en serie, para la fuente equivalente tomamos alguna como referencia y sumamos algebraicamente, colocando como positivas las fuentes de voltaje que tengan la misma polaridad que nuestra referencia y negativas las de polaridad diferente. La fuente resultante tendrá como modulo el resultado de la suma y la polaridad de la fuente de referencia, si el resultado es negativo la polaridad es la contraria a nuestra referencia.

Suponiendo que tomamos de referencia a la fuente V_1:

$$\boxed{V_S = V_1 + V_2 - V_3}$$

Fuentes de corriente en paralelo

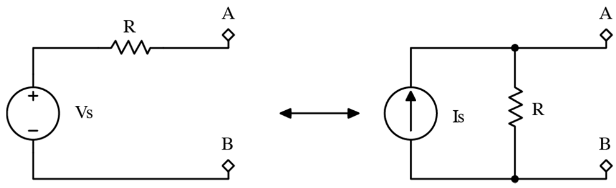


Tenemos fuentes independientes de corriente en paralelo, para la fuente equivalente tomamos alguna como referencia y sumamos algebraicamente, colocando como positivas las fuentes de voltaje que tengan la misma polaridad que nuestra referencia y negativas las de polaridad diferente. La fuente resultante tendrá como modulo el resultado de la suma y la polaridad de la fuente de referencia, si el resultado es negativo la polaridad es la contraria a nuestra referencia.

Suponiendo que tomamos de referencia a la fuente I_2:

$$\boxed{I_S = -I_1 + I_2 - I_3}$$

Transformación de Fuentes

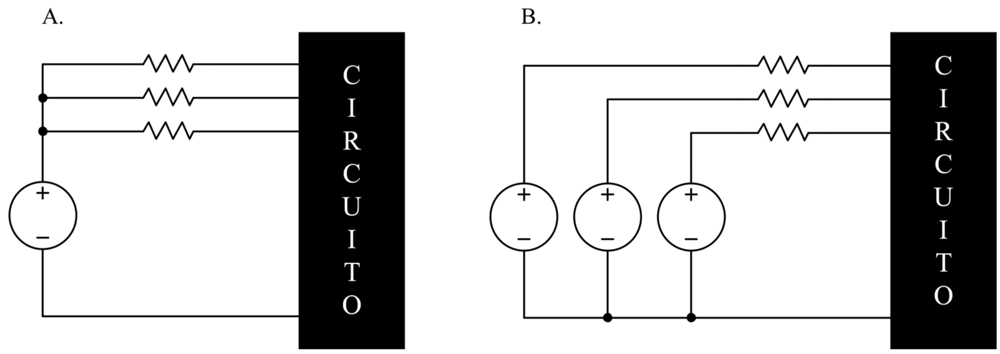


Por ley de Ohm tenemos que $I_S = V_S/R$ y $Vs = I_S R$.

Observación: El hecho de que hayamos hecho esto no significa que la corriente/voltaje de la resistencia es el de la fuente. Por ejemplo, en el caso de la fuente de corriente parte de la corriente fluye hacia la resistencia modelada.

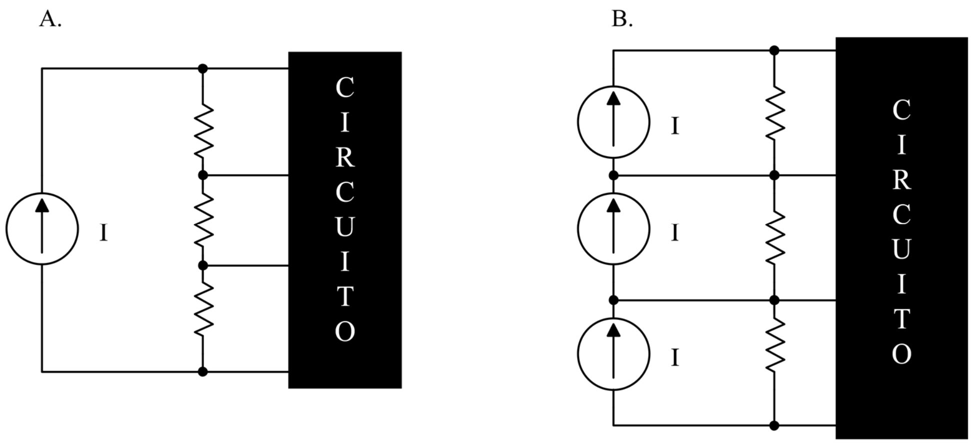
Teorema de Blakesley (Traslación de Fuentes)

Fuentes de voltaje



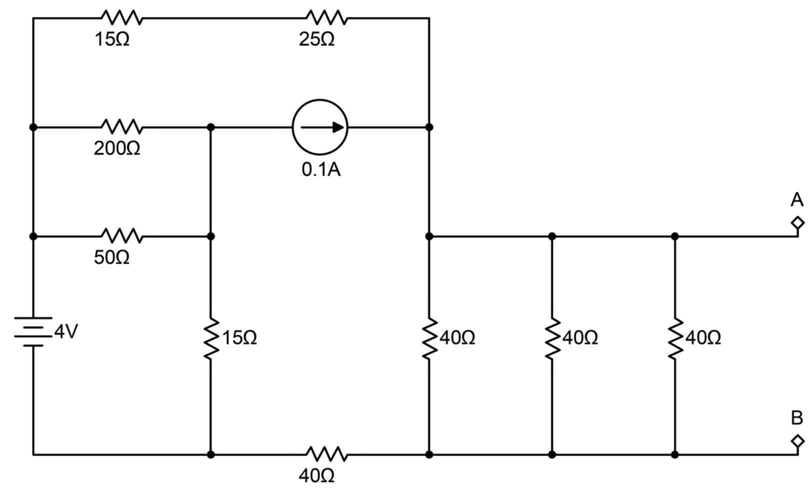
La fuente debe estar sola, sin tener ninguna resistencia en serie. Se debe respetar la polaridad de la fuente.

Fuentes de corriente



La fuente debe estar sola, sin tener ninguna resistencia en paralelo. Es **importante** que se respete la polaridad de la fuente.

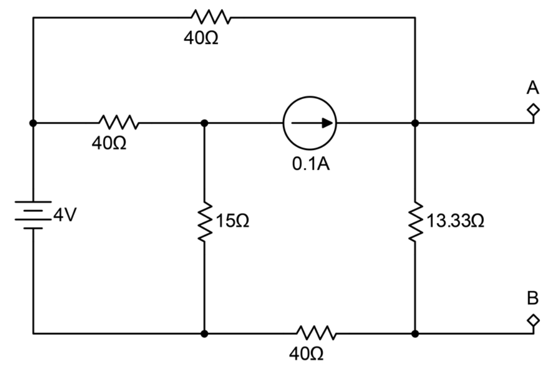
1. Encontrar el voltaje entre las terminales A y B (V_{AB})



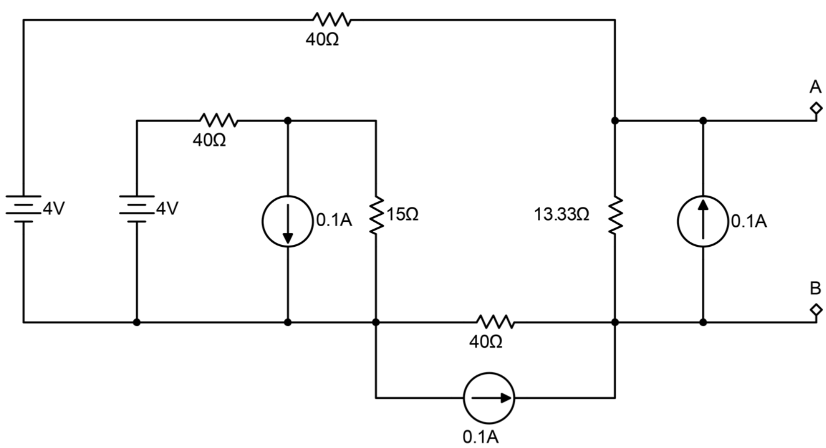
Primero simplificamos un poco el circuito

$$R_{eq} = 50\ \Omega \parallel 200\ \Omega = 40\ \Omega$$

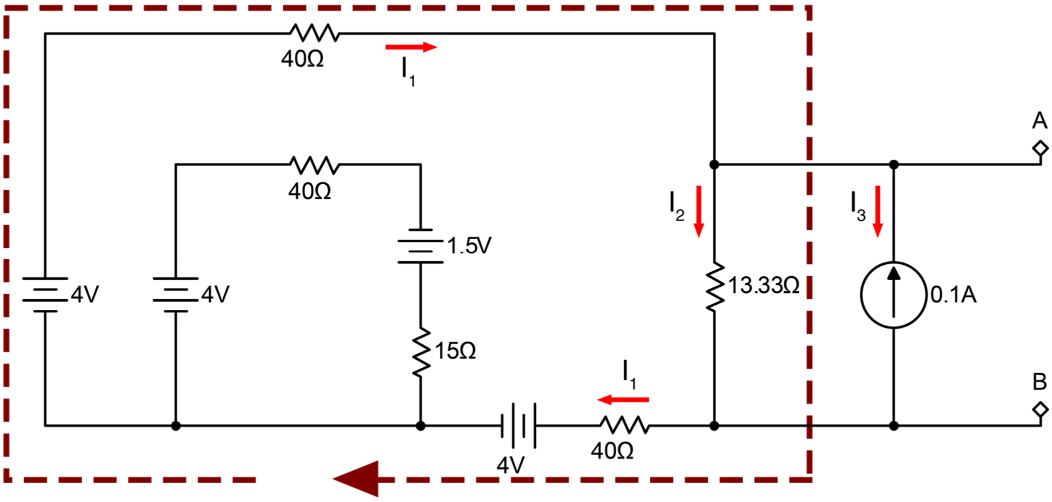
$$R_{eq2} = (40\ \Omega \parallel 40\ \Omega) \parallel 40\ \Omega = \frac{40}{3}\Omega \approx 13{,}33\ \Omega$$



Luego aplicamos Teorema de Blakesley para fuentes de tensión y corriente



Transformamos las fuentes de corriente en fuentes de tensión



Hacemos LKV en el lazo más externo y observamos que por LKC $I_1 = I_2 - 0{,}1$ mA y que $I_2 = I_1 + 0{,}1$ mA

$$-4 + 40I_1 + \frac{40}{3}(I_1 + 0{,}1) + 40I_1 + 4 = 0$$

$$I_1\left(40 + \frac{40}{3} + 40\right) = -\frac{4}{3}$$

$$I_1 = -\frac{4}{280} = -\frac{1}{70}\ \text{A}$$

Reemplazamos

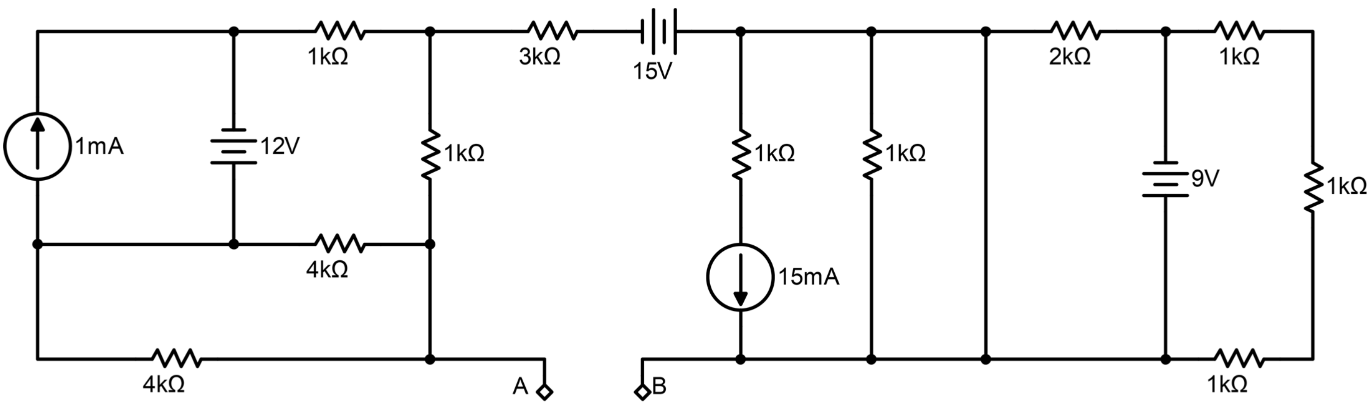
$$I_2 = 0{,}1 - \frac{1}{70} = \frac{3}{35}\ \text{A}$$

$$V_{AB} = V_{\frac{40}{3}\Omega} = \left(\frac{3}{35}\right)\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{40}{35}\ \text{V}$$

El voltaje entre las terminales A y B es:

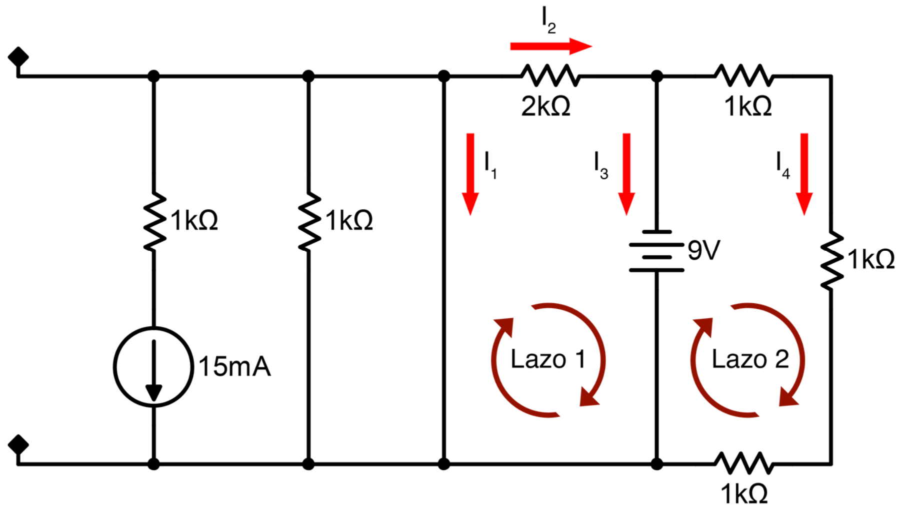
$$\boxed{V_{AB} = 1{,}1429\ \text{V}}$$

2. Encontrar el voltaje entre las terminales A y B (V_{AB}) y la potencia instantánea de la fuente de 9V



Potencia instantánea de la fuente de 9V:

Encontrar la potencia de la fuente de 9V se puede hacer de primero ya que esa parte del circuito es independiente del resto.



Hacemos LKV en el lazo 2

$$9 + (1\text{k} + 1\text{k} + 1\text{k})I_4 = 0$$
$$I_4 = -3 \text{ mA}$$

Hacemos LKV en el lazo 1[1]

$$(2\text{k})I_2 - 9 = 0$$
$$I_2 = 4{,}5 \text{ mA}$$

Hacemos LKC en el nodo de la fuente de 9V

$$I_2 = I_3 + I_4$$
$$I_3 = I_2 - I_4 = 4{,}5 - (-3) = 7{,}5 \text{ mA}$$

La potencia de la fuente de 9V es:

$$\boxed{P_{9V} = -(7{,}5 \text{ mA})(9 \text{ V}) = -67{,}5 \text{ mW}}$$

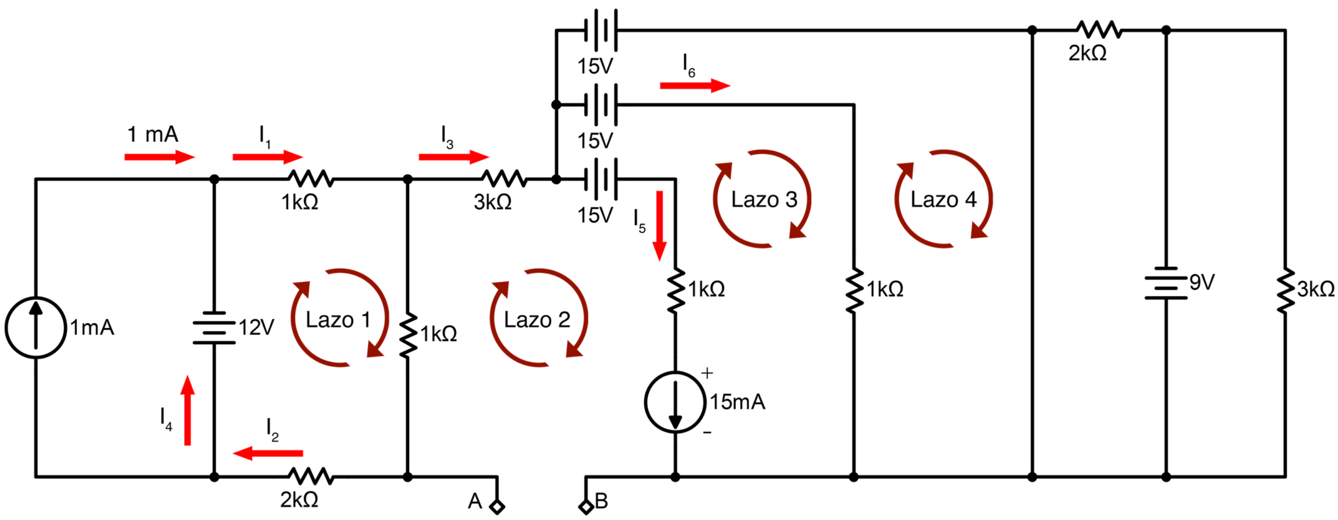
Voltaje entre las terminales A y B:

Primero simplificamos un poco el circuito

$$R_{eq} = 4\ \Omega \parallel 4\ \Omega = 2\ \Omega$$
$$R_{eq2} = 1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega = 3\text{k}\Omega$$

Luego aplicamos Teorema de Blakesley para fuentes de tensión

[1] También pudimos haber hecho un divisor de corriente.



Hacemos LKV en el lazo 1

$$12 + (1\text{k})I_1 + (1\text{k})I_2 + (2\text{k})I_2 = 0$$
$$12 + (1\text{k})I_1 + (3\text{k})I_2 = 0$$

Viendo el circuito nos damos cuenta que por LKC $I_1 = 1\text{mA} + I_4$ y que $I_2 = 1\text{ mA} + I_4$, por lo tanto $I_1 = I_2$

$$12 + (1\text{k})I_1 + (3\text{k})I_1 = 0$$
$$(4\text{k})I_1 = -12$$
$$I_1 = -3\text{ mA}$$

Hacemos LKV en el lazo 2

$$-(1\text{k})\text{I}_2 + (3\text{k})I_3 - 15 + (1\text{k})I_5 + V_f - V_{AB} = 0$$

Por LKC sé que $I_3 = I_1 - I_2 = -3 - (-3) = 0 \rightarrow I_3 = 0$. Viendo el circuito se sabe que $I_5 = 15\text{ mA}$

$$3 - 15 + 15 + V_f - V_{AB} = 0$$
$$V_{AB} = 3 + V_f$$

Hacemos LKV en el lazo 3

$$-V_f - (1\text{k})I_5 + 15 - 15 + (1\text{k})I_6 = 0$$
$$V_f = (1\text{k})I_6 - 15$$

Hacemos LKV en el lazo 4[2]

$$-(1\text{k})I_6 + 15 - 15 = 0$$
$$I_6 = 0$$

Reemplazamos

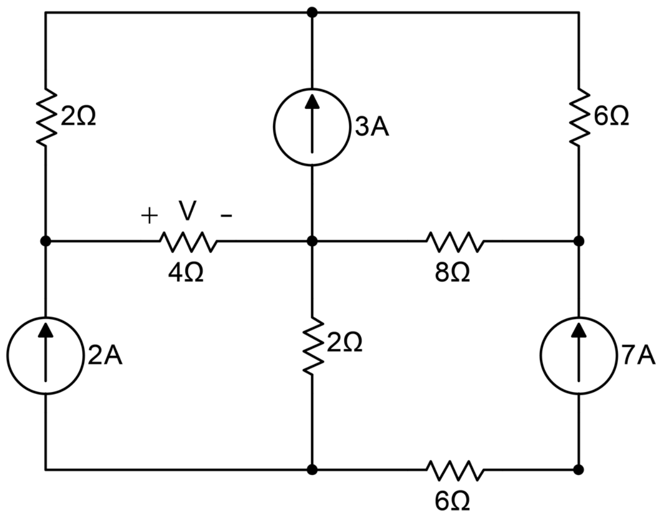
$$V_f = (1\text{k})(0) - 15 = -15 \rightarrow V_f = -15\text{ V}$$
$$V_{AB} = 3 + (-15) = -12\text{ V}$$

[2] Esto se pudo haber evitado jugando un poco con la topología, si movíamos el corto hacia el lazo 3 no hubiésemos tenido que buscar I_6, ya que el voltaje que nos faltaba hubiese sido cero. Inténtalo, al fin y al cabo no cambia nada (ni matemática ni físicamente.) y nos ahorramos una cuenta.

El voltaje entre las terminales A y B es:

$$\boxed{V_{AB} = -12\text{ V}}$$

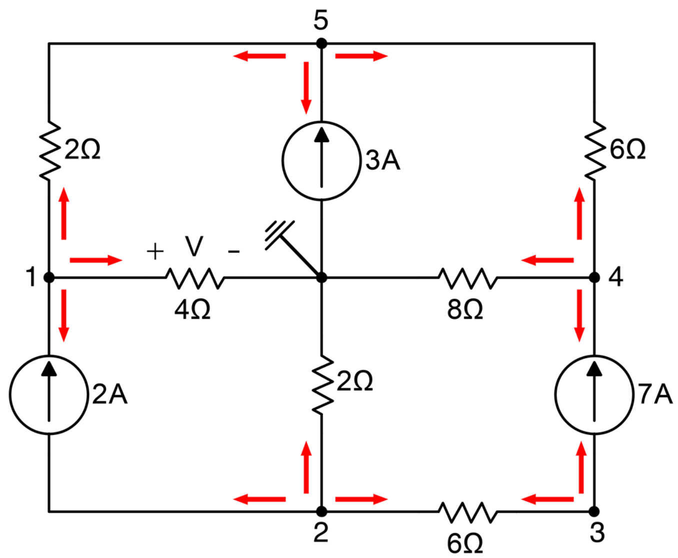
3. Encontrar el voltaje V por el método de nodos y por inspección nodal



Método de Nodos:

Para aplicar el método de nodos primero debemos elegir un nodo de referencia ($V_{REF} = 0$ V), lo mejor en este caso es elegir el nodo dónde converge el mayor número de ramas (casi siempre va a ser así). Ese nodo es el del centro, ahí colocamos nuestra referencia, que se identifica con el símbolo de *tierra*.

Luego, nombramos a los demás nodos.



Pasamos a escribir las ecuaciones de nodos (LKC), recordando que por convención todas las corrientes salen del nodo[3].

[3] Físicamente imposible, pero más sencillo al momento de plantear las ecuaciones. En cualquier caso el álgebra se cumple, por eso no importa.

Nodo 1

$$\frac{V_1 - V_5}{2\Omega} + \frac{V_1}{4\Omega} - 2\ \mathrm{A} = 0$$

Nodo 2

$$\frac{V_2 - V_3}{6\Omega} + \frac{V_2}{2\Omega} + 2\ \mathrm{A} = 0$$

Nodo 3

$$\frac{V_3 - V_2}{6\Omega} + 7\ \mathrm{A} = 0$$

Nodo 4

$$\frac{V_4 - V_5}{6\Omega} + \frac{V_4}{8\Omega} - 7\ \mathrm{A} = 0$$

Nodo 5

$$\frac{V_5 - V_1}{2\Omega} + \frac{V_5 - V_4}{6\Omega} - 3\ \mathrm{A} = 0$$

Tenemos 5 incógnitas y 5 variables, se trata de un sistema de ecuaciones simple pero tedioso. Del nodo 1, tomando factor común, tenemos que:

$$V_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 2 = \frac{V_5}{2}$$

$$V_5 = \frac{3V_1}{2} - 4$$

Del nodo 5, tomando factor común, tenemos:

$$V_5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) - 3 - \frac{V_1}{2} = \frac{V_4}{6}$$

$$\left(\frac{3V_1}{2} - 4\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) - 3 - \frac{V_1}{2} = \frac{V_4}{6}$$

$$\frac{V_1}{2} - \frac{17}{3} = \frac{V_4}{6}$$

$$V_4 = 3V_1 - 34$$

Del nodo 4, tomando factor común, tenemos:

$$V_4\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)-7=\frac{V_5}{6}$$

$$(3V_1-34)\left(\frac{7}{4}\right)-42=\frac{3V_1}{2}-4$$

$$\frac{5}{8}V_1=\frac{130}{8}$$

$$V_1=26\text{ V}$$

Reemplazamos

$$V_4=3(26)-34=44\text{ V}$$

$$V_5=\frac{3(26)}{2}-4=35\text{ V}$$

Del nodo 3, tomando factor común, tenemos:

$$\frac{V_3}{6}+7=\frac{V_2}{6}$$

$$V_2=V_3+42$$

Del nodo 2, tomando factor común, tenemos:

$$V_2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)+2=\frac{V_3}{6}$$

$$\left[(V_3+42)\left(\frac{2}{3}\right)\right]+2=\frac{V_3}{6}$$

$$V_3=-\frac{180}{3}=-60\text{ V}$$

Reemplazando

$$V_2=(-60)+42=-18\text{ V}$$

Los voltajes nodales son:

$$\boxed{\begin{array}{c}V_1=26\text{ V}\\V_2=-18\text{ V}\\V_3=-60\text{ V}\\V_4=44\text{ V}\\V_5=35\text{ V}\end{array}}$$

Método de Inspección Nodal:

Con este método tratamos de sacar directamente las matrices del sistema de ecuaciones que resolvimos en la parte anterior, de esta manera la resolución puede ser más simple. Para emplear el método hay que seguir los siguientes pasos:

1. Se toma un nodo como referencia ($V_{REF} = 0$ V) y se nombran los demás nodos[4].
2. Se crea una matriz $n \times n$, donde n representa el número de nodos que no son referencia[5]. Esta matriz se llamará Y_{BUS}.
3. En las casillas a_{ij} donde $j = i$ (e.g. a_{11}, a_{22}, …) se coloca la suma de todas las resistencias que están directamente conectadas al nodo i (e.g. para el nodo 1 es a_{11} y se coloca $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).
4. En las casillas a_{ij} donde $j \neq i$ (e.g. a_{12}, a_{32}, …) se coloca el negativo de la suma ($-(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$) de todas las resistencias que están directamente conectadas entre el nodo i y el nodo j (e.g. para a_{14} tomamos las resistencias que están directamente conectadas entre el nodo 1 y el nodo 4, se coloca 0 porque no hay ninguna resistencia conectada directamente entre los dos[6]).
5. Se crea una matriz columna $nx1$ llamada I, compuesta de las fuentes de corriente conectadas directamente al nodo $i1$, en las casillas a_{i1} se coloca la suma algebraica de las corrientes que proporcionan las fuentes, si la corriente de la fuente entra al nodo el valor es positivo y si sale es negativo.
6. Por último, se resuelve el siguiente sistema $[Y_{BUS}][V] = [I]$. Donde $[V]$ es la matriz de voltajes nodales. Para resolver el sistema calculamos la inversa de nuestra Y_{BUS} y la multiplicamos por la matriz I, en pocas palabras $[V] = [Y_{BUS}]^{-1}[I]$.
7. Si el circuito no posee fuentes dependientes entonces se puede decir que la matriz es simétrica, esto significa que $a_{ij} = a_{ji}$ (e.g. $a_{45} = a_{54}$).

Mi matriz [Y_{BUS}]

$$[Y_{BUS}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \left(\frac{1}{6}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right) & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) \end{bmatrix}$$

---

[4] En este caso tomamos el mismo nodo de la parte anterior.
[5] En nuestro caso son 5, así que la matriz es 5x5.
[6] El nodo de referencia está entre estos dos nodos, por eso no se colocan ni la resistencia de 4 ni la de 8 ohms.

La matriz de corrientes inyectadas [I]

$$[I] = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

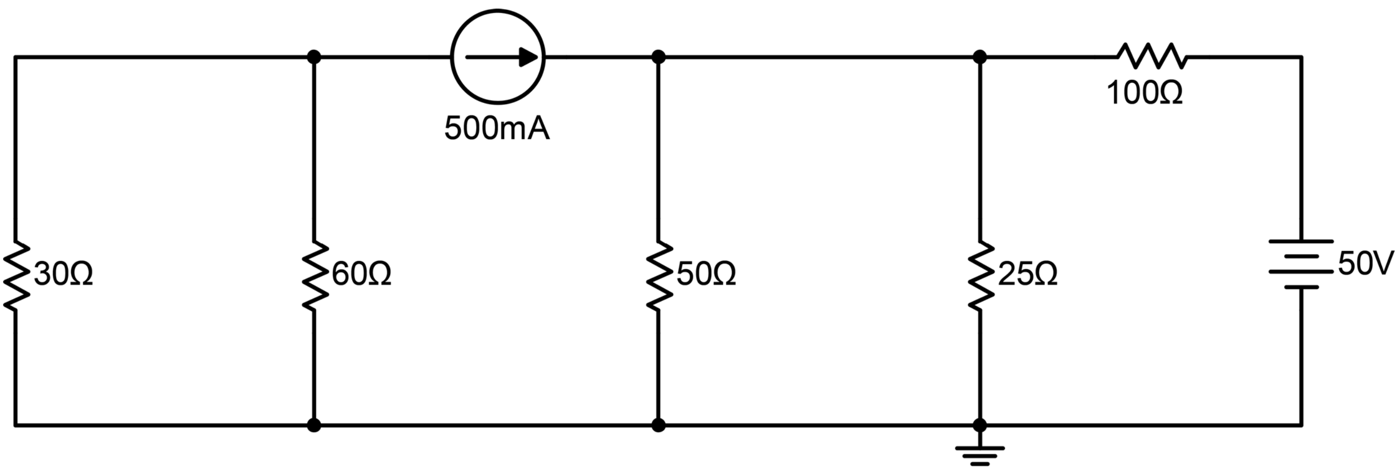
Ahora, la matriz de voltajes será $[Y_{BUS}][V] = [I] \rightarrow [V] = [Y_{BUS}]^{-1}[I]$. Así que debemos buscar la inversa de nuestra matriz [Y_{BUS}] y luego multiplicarla por la matriz [I]. Para que nos quede:

$$[V] = \begin{bmatrix} 26 \\ -18 \\ -60 \\ 44 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Los voltajes nodales por el método de inspección nodal son:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= 26 \text{ V} \\ V_2 &= -18 \text{ V} \\ V_3 &= -60 \text{ V} \\ V_4 &= 44 \text{ V} \\ V_5 &= 35 \text{ V} \end{aligned}}$$

8. Encontrar los voltajes nodales A, B y C por el método de nodos y por el método de mallas

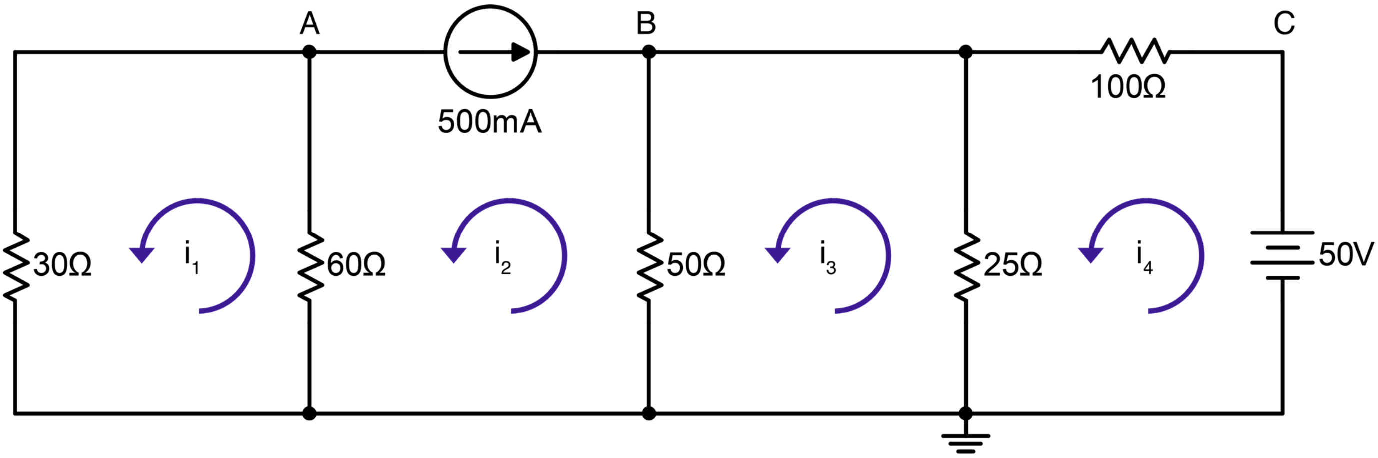


Método de Mallas:

Para emplear el método de mallas debemos crear *corrientes de malla* dentro de cada uno de los lazos de nuestro circuito.

Luego emplear LKV en cada uno de esos lazos, teniendo en cuenta que los voltajes deben expresarse en función de la corriente de malla y la resistencia. Si nos encontramos con una resistencia donde dos corrientes de malla coinciden debemos expresar el voltaje como la diferencia entre esas dos corrientes, colocando como positiva la corriente de malla con la que estamos trabajando.

Si alguna corriente de malla coincide con una fuente de corriente, entonces nuestra corriente de malla tendrá el valor de esa fuente, y el signo dependerá de la orientación (si la orientación de la fuente y la de la corriente de malla son diferentes entonces el valor es negativo)[7].



Nuestras ecuaciones de mallas:

1) $30i_1 + 60(i_1 - i_2) = 0$
2) $i_2 = -500 \text{ mA}$
3) $50(i_3 - i_2) + 25(i_3 - i_4) = 0$
4) $-50 + 100i_4 + 25(i_4 - i_3) = 0$

Para la ecuación 1

$$30i_1 + 60i_1 = 60(-500 \text{ mA})$$

$$90i_1 = -30 \text{ A}$$

$$i_1 = -\frac{30 \text{ A}}{90} = -333{,}3333 \text{ mA}$$

Para la ecuación 2

$$50i_3 + 25 \text{ A} + 25i_3 - 25i_4 = 0$$

$$75i_3 = 25i_4 - 25$$

$$i_3 = \frac{25i_4 - 25}{75} = \frac{i_4 - 1}{3}$$

Para la ecuación 3

$$-50 + 100i_4 + 25i_4 - 25i_3 = 0$$

$$-25i_3 = 50 - 125i_4$$

$$i_3 = 5i_4 - 2$$

[7] OJO Esto solo se puede hacer cuando una sola corriente coincide con la fuente, si dos o más corrientes de malla coinciden con la fuente tenemos lo que se conoce como una *supermalla*.

Ahora restamos los i_3 de las ecuaciones 2 y 3

$$\frac{i_4 - 1}{3} - 5i_4 + 2 = 0$$

$$\frac{i_4 - 1 - 15i_4}{3} = -2$$

$$-14i_4 - 1 = -6$$

$$i_4 = \frac{5}{14} = 357{,}1429 \text{ mA}$$

Reemplazamos

$$i_3 = 5(357{,}1429 \text{ mA}) - 2 = -214{,}2857 \text{ mA}$$

Las ecuaciones para los voltajes son

$$V_A = 30i_1 \approx -10 \text{ V}$$

$$V_B = 25(i_4 - i_3) = 14{,}28572 \text{ V}$$

$$V_{100\Omega} = V_C - V_B{}^{8}$$

$$V_C = V_{100\Omega} + V_B = 100(357{,}1429 \text{ mA}) + 14{,}28572 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

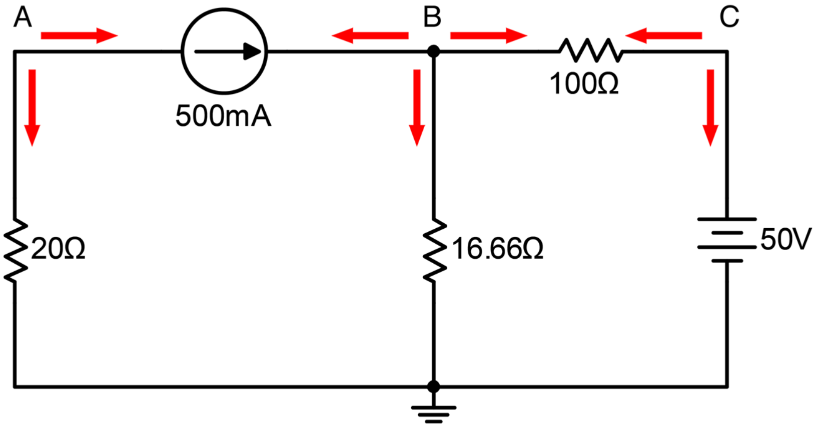
Los voltajes nodales por el método de mallas son:

$$\boxed{\begin{array}{c} V_A = -10 \text{ V} \\ V_B = 14{,}28572 \text{ V} \\ V_C = 50 \text{ V} \end{array}}$$

Método de Nodos:

Simplificamos un poco el circuito

$$R_{eq} = 30\ \Omega \parallel 60\ \Omega = 20\ \Omega$$
$$R_{eq2} = 50\ \Omega \parallel 25\ \Omega = 16{,}6666\ \Omega$$



[8] Fíjese en el sentido de la corriente de malla (i_4), ésta fluye del nodo C al nodo B, por eso el voltaje de la resistencia de 100 Ω debe estar definido así.

Las ecuaciones de nodos son:

Nodo C

Entre el nodo C y tierra hay una fuente de voltaje de 50 V con el polo positivo apuntando al nodo C, así que el voltaje de ese nodo es 50 V.

Nodo A

$$\frac{V_A}{20\Omega} + 500 \text{ mA} = 0$$

$$V_A = -10 \text{ V}$$

Nodo B

$$\frac{V_B}{16{,}66\Omega} + \frac{V_B - V_C}{100\Omega} - 500 \text{ mA} = 0$$

$$V_B\left(\frac{1}{16{,}66} + \frac{1}{100}\right) = 0{,}5 + \frac{50}{100}$$

$$V_B\left(\frac{116{,}6666}{1666{,}6666}\right) = 1$$

$$V_B = \frac{1666{,}6666}{116{,}6666} = 14{,}28572 \text{ V}$$

Los voltajes nodales por el método de nodos son:

$$\boxed{\begin{aligned} V_A &= -10 \text{ V} \\ V_B &= 14{,}28572 \text{ V} \\ V_C &= 50 \text{ V} \end{aligned}}$$

Si existe algún error en la redacción/solución de los ejercicios o si usted tiene alguna duda por favor comunicarse al siguiente correo
nestorlbriton@hotmail.com

¡Muchas gracias!

Estos ejercicios son sacados del problemario del profesor J.C. Regidor, el problemario de la profesora Thamara Villegas, exámenes antiguos y de *Fundamentos de Circuitos Eléctricos* (5ta Edición) de A. Sadiku y C. Alexander.